УДК 518.5

И. В. Бойков

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ХОПФИЛДА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием, описываемых системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены нейронные сети Хопфилда с запаздыванием и разрывными функциями активации.

Ключевые слова: нейронные сети Хопфилда, асимптотическая устойчивость, устойчивость по Ляпунову.

Abstract. The author investigates Lyapunov asymptotic stability of Hopfield neural networks with time lag, described by systems of nonlinear normal differential equations. The article considers Hopfield neural networks with time lags and discontinuous activation functions.

Key words: Hopfield neural networks, asymptotic stability, Lyapunov stability.

Введение

Новый класс рекуррентных нейронных сетей, известных как нейронные сети Хопфилда, (НСХ) был введен Хопфилдом тридцать лет назад [1, 2]. С тех пор НСХ являются предметом активных исследований. НСХ имеют несколько типичных применений: они применяются при решении оптимизационных проблем и используются как ассоциативная память.

В последнее время НСХ применяются для решения задач математической физики. Во всех случаях применения НСХ желательно, чтобы сеть имела единственную стационарную точку и была устойчива относительно этой точки. Еще более предпочтительна асимптотическая устойчивость или даже равномерная асимптотическая устойчивость. Большое число работ посвящено исследованию устойчивости различных дискретных, непрерывных и импульсных НСХ с запаздыванием и без запаздывания [3–8].

Целью данной статьи является исследование равномерной асимптотической устойчивости НСХ с запаздываниями с непрерывными и разрывными функциями активации. Для НСХ без запаздывания аналогичные результаты получены в предыдущей работе автора [6] (см. также [8].)

Статья построена следующим образом. В разделе 1 приводятся необходимые определения. В разделе 2 исследуется устойчивость НСХ с непрерывными функциями активации. В разделе 3 исследуются НСХ с разрывными функциями активации.

1. Постановка задачи

В работе исследуются непрерывные НСХ следующих видов:

$$C_k \frac{dx_k(t)}{dt} = -\frac{1}{R_k} x_k(t) + \sum_{l=1}^{n} \omega_{kl} \varphi_l(x_l(t-\tau)) + I_k, \quad t \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \qquad (1)$$

$$C_k \frac{dx_k(t)}{dt} = -\frac{1}{R_k} x_k(t) + \varphi_k \sum_{l=1}^{n} \omega_{kl} (x_l(t-\tau)) + I_k, \quad t \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Здесь n – число нейронов в сети; $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ – вектор состояния сети в момент времени t; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – функции активации нейронов; R_k, C_k, I_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – сопротивления, емкости и внешние токи соответственно.

Формально нейронные сети (1), (2) могут быть описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -a_k(t)x_k(t) + \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t)\varphi_l(x_l(t-\tau)) + I_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

и системой

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = -a_k(t)x_k(t) + \varphi\left(\sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t)x_l(t-\tau)\right) + I_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Метод исследований устойчивости нейронных сетей (1), (2), развитый в данной статье, также применим и к исследованию нейронных сетей вида

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = a_k(t, x_k)\left[b_k(t, x_k) - \sum_{l=1}^{n} c_{kl}(t)\varphi_l(x_l(t-\tau))\right], \quad k = 1, 2 \ldots, n. \tag{5}$$

Будем считать, что в моделях (3)–(5) в промежутке времени $0 \le t \le \tau$

$$x_k(t) \equiv 0, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Напомним некоторые определения и обозначения.

Прежде всего приведем определение устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим в банаховом пространстве B нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x(t)) \tag{7}$$

с начальным значением

$$x(t_0) = x_0. \tag{8}$$

Будем считать, что задача Коши (7)–(8) имеет решение при $t_0 \le t < \infty$.

Выделим некоторое решение $x(t) = \varphi(t)$ уравнения (7) и назовем его невозмущенным движением (невозмущенным решением).

Определение 1. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого как угодно малого $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\| x(t_0) - \varphi(t_0) \| < \delta$ следует $\| x(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$ (здесь через $x(t)$ обозначено любое решение уравнения (7), определенное начальным условием $x(t_0)$).

Определение 2. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} \| x(t) - \varphi(t) \| = 0.$

Определение 3. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется экспоненциально устойчивым, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\| x(t)-\varphi(t)\| \le Ae^{-\alpha t}$, где A и α – положительные константы, не зависящие от t.

Определение 4. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво при любом $x_0 \in B$.

Введем следующее определение.

Определение 5. Решение $\varphi(t)$ уравнения (7) называется равномерно асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и, кроме того, $\| x(t_2)-\varphi(t_2)\| < \| x(t_1)-\varphi(t_1)\|$ при $x_2 > x_1$.

Приведем обозначения, используемые в статье. Пусть X – банахово пространство, K – оператор, действующий из X в X. Тогда $B(a,r)=\{x,a\in X : \| x-a\| \le r\}$, $S(a,r)=\{x,a\in X : \| x-a\| = r\}$, $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K, определяемая [9] выражением

$$\Lambda(K)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\| I+hK\| -1}{h},$$

где $h\downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

В монографии [9] показано, что $\Lambda(A)$ всегда существует (но может принимать отрицательные значения). Там же приведены следующие свойства логарифмической нормы:

$$\Lambda(\alpha A)=\alpha\Lambda(A),\ \alpha\ge 0,\ |\Lambda(A)|\le\| A\|;\ \Lambda(A+B)\le\Lambda(A)+\Lambda(B);$$

$$|\Lambda(A)-\Lambda(B)|\le\| A-B\|;\ \Lambda(A)+\Lambda(-A)\ge 0,\quad e^{-\Lambda(-A)}\le\| e^{A}\| \le e^{\Lambda(A)}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка $-\Lambda(-A)\le \mathrm{Re}\lambda \le \Lambda(A)$ для всех $\lambda\in\sigma(A)$.

Для наиболее употребительных норм логарифмическая норма известна.

Пусть дана вещественная матрица $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,2,\dots,n$, в n-мерном пространстве R_n векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ с нормой

$$\| x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|, \| x\|_2=\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right]^{1/2},\ \| x\|_3=\max_{1\le k\le 1}|x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [10]

$$\Lambda_1(A)=\max_{j}\left(a_{jj}+\sum_{i\ne j}|a_{ij}|\right),\ \Lambda_2(A)=\lambda_{\max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right),$$

$$\Lambda_3(A)=\max_{i}\left(a_{ii}+\sum_{j\ne i}|a_{ij}|\right).$$

В данной работе используется третья норма.

2. Устойчивость нейронных сетей с непрерывными функциями активации

Вначале исследуем устойчивость нейронной сети (3) в предположении, что $\varphi_l(u)$ – гладкие функции, $-\infty < u < \infty$.

Пусть $x^*(t) = \{x_1^*(t), \cdots, x_n^*(t)\}$ – решение системы уравнений (3) при нулевых начальных условиях. Исследуем устойчивость решения $x^*(t)$ при возмущении начальных условий.

Сделаем замену переменных: $x_k(t) = z_k(t) + x_k^*(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда система уравнений (3) принимает вид

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t) z_k(t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t)\Big(\varphi_l(z_l(t-\tau) + x_l^*(t-\tau)) - \varphi_l(x_l^*(t-\tau))\Big), \; k = 1, 2 \ldots, n. \qquad (9)$$

Устойчивость системы (3) будем исследовать отдельно в промежутке времени $0 \le t \le \tau$ и $\tau \le t < \infty$.

В промежутке времени $0 \le t \le \tau$ система уравнений (9) имеет вид

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t) z_k(t), \; k = 1, 2 \ldots, n. \qquad (10)$$

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (10) при начальном возмущении

$$z_k(0) = \beta_k, \qquad (11)$$

где $\| z(0) \| < \delta$.

Здесь $z(0) = \{z_k(0)\}$, $k = 1, 2 \ldots, n$.

Можно показать [8], что при выполнении условия

$$a_k(t) > 0, \; 0 \le t \le \tau, \; k = 1, 2 \ldots, n,$$

тривиальное решение системы уравнений (10) устойчиво.

При выполнении условия

$$a_k(t) \ge \alpha_0 > 0, \; 0 \le t \le \tau, \; k = 1, 2 \ldots, n,$$

тривиальное решение системы уравнений (10) асимптотически устойчиво.

В обоих случаях эти условия гарантируют нахождение траектории решения задачи Коши (9), (11) внутри шара $B(0, \delta)$.

Перейдем к исследованию устойчивости решения системы уравнений (9) при $t \ge \tau$. В качестве начального условия возьмем решение задачи Коши (9), (11) в момент времени $t = \tau$. Следовательно, будем рассматривать систему уравнений (9) при начальных условиях

$$z_k(\tau) = \beta_k^*, \; k = 1, 2 \ldots, n, \qquad (12)$$

и при предыстории $z_k(t)$, $k = 1, 2 \ldots, n$, $0 \le t \le \tau$.

При этом можно налагать различные условия на вектор-функцию $\Phi(z)=\{\varphi_1(z_1),\ldots,\varphi_n(z_n)\}$. Предположим, что функции $\varphi_k(z), k=1,2\ldots,n,$ разлагаются в равномерно сходящиеся в некоторой окрестности нуля степенные ряды по переменной z.

Тогда систему уравнений (9) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dz_k(t)}{dt}=-a_k(t)z_k(t)+\sum_{l=1}^{n}w_{kl}(t)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau))}{j!}z_l^j(t-\tau),\ \ k=1,2\ldots,n. \quad (13)$$

Предполагая, что производные $\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau)), l=1,2,\ldots,n, j=1,2,\ldots,$ равномерно ограничены по модулю константой B, вместо системы (13) ограничимся системой уравнений

$$\frac{dz_k(t)}{dt}=-a_k(t)z_k(t)+\sum_{l=1}^{n}w_{kl}(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau))}{j!}z_l^j(t-\tau),\ \ k=1,2\ldots,n. \quad (14)$$

Из дальнейшего будет очевидно, что при приведенных выше условиях из устойчивости системы (14) следует устойчивость системы уравнений (13).

Замечание. Условие ограниченности модулей производных всех порядков константой B очень жесткое. Ниже будет показано, что полученные в этом разделе критерии устойчивости справедливы и при выполнении условий $\|\varphi^{(k)}(x)\|_{C[0,T]}\le B^k k^k$, $k=0,1,\ldots$, $B\le 1/e$.

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (14) при начальном приближении (12). Доказательство устойчивости проведем от противного. Предположим, что в момент времени T траектория системы (14), (12) покидает шар $B(0,2\delta_0)$, проходя через точку $z(T)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $|z_1(T)|=\delta$.

Представим систему уравнений (14) в следующем виде:

$$\frac{dz_k(t)}{dt}=-a_k(T)z_k(t)+\sum_{l=1}^{n}w_{kl}(T)\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(T-\tau))}{j!}\frac{z_l^j(T-\tau)}{z_1^j(T)}z_1^j(t)-$$

$$-(a_k(t)-a_k(T))z_k(t)+\sum_{l=1}^{n}(w_{kl}(t)-w_{kl}(T))\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(T-\tau))}{j!}\frac{z_l^j(T-\tau)}{z_1^j(T)}z_1^j(t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}w_{kl}(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau))-\varphi_l^{(j)}(x_l^*(T-\tau))}{j!}\frac{z_l^j(T-\tau)}{z_1^j(T)}z_1^j(t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}w_{kl}(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau))}{j!}\frac{z_l^j(t-\tau)-z_1^j(T-t)}{z_1^j(T)}z_1^j(t). \quad (15)$$

Из непрерывности функций $a_k(t)$, $w_{kl}(t)$, $\varphi_l^{(j)}(z_l^*(t-\tau))$, $z_l^j(t-\tau)$, $k=1,2\ldots,n$, $l=1,2,\ldots,n$, $j=1,2$, следует, что для любого $\varepsilon(\varepsilon>0)$ найдется такой промежуток времени $[T,T_1], T_1 = T + \Delta T$, что при $t \in [T,T_1]$ $\| \Psi(t) \| \le \varepsilon \| z(t) \|$, где $\Psi(t) = \{\Psi_1(t),\dots,\Psi_n(t)\}^T$,

$$\Psi_k(t) = -(a_k(t) - a_k(T))z_k(t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}(w_{kl}(t) - w_{kl}(T))\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(z_l^*(T-\tau))}{j!}\frac{z_l^j(t-\tau)}{z_1^j(T)}z_1^j(t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}w_{kl}(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau) - \varphi_l^{(j)}(x_l^*(T-\tau))}{j!}\frac{z_l^j(t-\tau)}{z_1^j(T)}z_1^j(t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}w_{kl}(t)\sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_l^{(j)}(x_l^*(t-\tau)}{j!}\frac{z_l^j(t-\tau) - z_l^j(T-\tau)}{z_1^j(\tau)}z_1^j(t), \ k = 1,2\dots,n.$$

Будем считать, что в промежутке времени $[T,T_1]$

$$\| z(t-\tau) \| < \| z(T) \|.$$

В противном случае вместо сегмента $[T,T_1]$ можно взять меньший промежуток времени $[T,T_2]$, где $T_2 < T_1$.

Введем обозначения:

$$\alpha(T) = \{-a_1(T),\dots,-a_n(T)\};$$

$$\beta(T) = \{\beta_1(T),\dots,\beta_n(T)),$$

где

$$\beta_k(T) = \sum_{l=1}^{n}w_{kl}(T)\frac{\varphi_l^{(1)}(x_l^*(T-\tau))}{1!}\frac{z_l(T-\tau)}{z_1(T)}, \ k = 1,2\dots,n;$$

$$\gamma_k(T) = \sum_{l=1}^{n}w_{kl}(T)\frac{\varphi_l^{(2)}(x_l^*(T-\tau))}{2!}\frac{z_l^2(T-\tau)}{z_1^2(T)}, \ k = 1,2\dots,n.$$

Введем матрицы $A(T)$, $B(T)$, $\Gamma(t)$. Матрица $A(T)$ является диагональной, элементы $a_{jj}(T)$, $j = 1,2,\dots,n$, которой равны $a_{jj}(T) = -a_j(T)$.

Матрица $B(T)$ составлена из элементов $b_{ij}(T)$, определяемых равенствами $b_{i1}(T) = \beta_i(T)$, $i = 1,2,\dots,n$, $b_{ij}(T) = 0$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 2,3,\dots,n$.

Матрица $\Gamma(T)$ составлена из элементов $\gamma_{ij(T)}$, определенных равенствами $\gamma_{i1}(T) = \gamma_i(T)$, $i = 1,2,\dots,n$, $\gamma_{ij}(T) = 0$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 2,3,\dots,n$.

Система уравнений (15) может быть записана в более компактной форме:

$$\frac{dz_k}{dt} = \alpha_{kk}(T)z_k(t) + b_{k1}(T)z_1(t) + \gamma_{k1}z_1^2(t) + \psi_k(t), \ k = 1,2,\dots,n. \quad (16)$$

В операторной форме система уравнений (16) имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = A(T)z(t) + B(T)z(t) + \Gamma(T)z^2(t) + \Psi(t), \quad (17)$$

где $z(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$.

Решение задачи Коши (17), (12) в операторной форме имеет вид

$$z(t) = e^{(A(T)+B(T))(t-T)}z(T) + \int_T^t e^{(A(T)+B(T))(t-s)}(\Gamma(T)z^2(s) + \Psi(s))ds. \quad (18)$$

Переходя в (18) к нормам, имеем

$$\| z(t) \| \le e^{\Lambda(A(T)+B(T))(t-T)} \| z(T) \| +$$

$$+\int_T^t e^{\Lambda(A(T)+B(T))(t-s)} \Big(\| \Gamma(T) \| \| z^2(s) \| + \| \Psi(s) \| \Big) ds. \quad (19)$$

Так как $\| \Psi(s) \| \le \varepsilon \| z(s) \|$ при $s \in [T, T_1]$, а

$$\| \Gamma(T) \| = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left| w_{kl}(T) \frac{\varphi_l^{(2)}(x_l^*(T-\tau))}{2!} \frac{z_l^2(T-\tau)}{z_1^2(T)} \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n | w_{kl}(T) | \frac{| \varphi_l^{(2)}(x_l^*(T-\tau)) |}{2!} \le K,$$

то

$$\| \Gamma(T) \| \| z^2(s) \| + \| \psi(s) \| \le (K \| z(s) \| + \varepsilon) \| z(s) \| \le \chi \| z(s) \|.$$

Введем функцию

$$\varphi(t) = e^{-\Lambda(A(T)+B(T))t} \| z(t) \|,$$

тогда неравенство (19) можно представить в виде

$$\varphi(t) \le \varphi(T) + \chi \int_0^t \varphi(s) ds. \quad (20)$$

Применяя к (20) неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем

$$\varphi(t) \le e^{\chi(t-T)} \varphi(T).$$

Возвращаясь к нормам, приходим к неравенству

$$\| z(t) \le e^{(\Lambda(A(T)+B(T))+\chi)(t-T)} \| z(T) \|. \quad (21)$$

Из неравенства (21) следует, что если $\Lambda(A(T)+B(T)) + \chi < 0$, то траектория $z(t, z(0))$ решения задачи Коши (9), (11) не покидает шара $B(0, \delta)$ в течение промежутка времени $t \in [T, T_1]$.

Так как по определению устойчивости по Ляпунову величина δ может быть взята достаточно малой, то при выполнении неравенства $\Lambda(A(T)+B(T))<0$ найдется такое δ_* и такой промежуток времени ΔT_*, что при начальном условии $\| z(0)\| < \delta_*$ и в течение промежутка времени $[T, T+\Delta T_*)]$ $\Lambda(A(T)+B(T))+\chi<0$. Таким образом, при выполнении этих условий получено противоречие, и траектория $z(t, z(0))$ в момент времени T не покидает шара $B(0,\delta)$.

Покажем, что при выполнении при $0 \le t < \infty$ следующих условий:

а) $\Lambda(A(t)+B(t)) \le -\nu,\ \ \nu>0$,

б) $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n} | w_{kl}(t)| \dfrac{|\varphi_l^{(2)}(t_\tau)|}{2!} \le K$,

тривиальное решение системы уравнений (14) устойчиво.

В самом деле, из условия (б) следует равномерная ограниченность суммы

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} | w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{(2)}(t_\tau)|}{2!} \ \text{при}\ 0 \le t \le \infty.$$

Следовательно, найдется такое δ_*, что $K\delta_* < \nu/4$. Тогда любая траектория решения уравнения (9), начавшаяся в шаре $B(0,\delta_*)$, ее не покидает.

Покажем, что условия (а) и (б) достаточные для равномерной асимптотической устойчивости.

Рассмотрим траекторию решения уравнения (9) при начальном условии $z(0)$, $\| z(0)\| = \delta_*$, где δ_* было определено выше. Тогда, как показано выше, существует такой промежуток времени ΔT_0, что при $t \in [0, \Delta T_0]$

$$\| z(t)\| \le e^{-\nu t/4} \| z(0)\|.$$

Для момента времени $T_1 = \Delta T_0$ также существует промежуток времени ΔT_1 такой, что при $t \in [T_1, T_1+\Delta T_1]$ $\| z(t)\| \le e^{-\nu t/4} \| z(T_1)\|$. Следовательно, $\| z(T_2)\| \le e^{-\nu(\Delta T_0+\Delta T_1)/4} \| z(0)\|$.

Продолжая этот процесс, имеем

$$\| z(T_{k+1})\| \le e^{-\nu\left(\sum\limits_{l=0}^{k}\Delta T_l\right)/4} \| z(0)\|. \tag{22}$$

Из неравенств (22) следует, что если $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{l=0}^{k}\Delta T_k = \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\| z(t)\| = 0$.

Так как $\Delta T_k \ge 0$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$, то имеются две возможности:

1) $\lim \sum\limits_{l=0}^{\infty}\Delta T_k = \infty$;

2) $\lim \sum_{l=0}^{\infty} \Delta T_k = T_*$.

В первом случае, как показано выше, имеет место равномерная асимптотическая сходимость.

Рассмотрим второй случай. Если $\| z(T_*) \| = 0,$ то доказательство завершено. Пусть $\| z(T_*) \| \neq 0.$ Так как функция $z(t)$ непрерывная, то существует предел $\lim\limits_{t \to T_*} \| z(t) \| = \| z(T_*) \|$. Взяв $z(T_*)$ в качестве начального приближения, убеждаемся, что существует промежуток времени $[T_*, T_* + \Delta T_{**}],$ в течение которого $\| z(t) \| < e^{-\nu(t - T_*)/4} \| z(T_*) \|$. Обозначим через T_{**} максимальный промежуток времени, в течение которого выполняется неравенство $\| z(t) \| < e^{-\nu t/4} \| z(0) \|$. Очевидно, $\| z(T_{**}) \| = 0,$ так как в противном случае предыдущее неравенство может быть продолжено на промежуток $[T_{**}, T_{**} + \Delta T_{**}]$.

Таким образом, при выполнении второй возможности $\| z(T_*) \| = 0.$

Осталось рассмотреть общий случай, когда выполняются условия

$$\| \varphi^{(j)}(x) \|_{C[0,\infty]} \le B^j j^j, \ \ j = 0, 1, \ldots, n, \ldots$$

Как показано выше, для равномерной асимптотической устойчивости достаточно потребовать выполнения условий:

а) $\Lambda(A(t) + B(t)) \le -\nu, \ \ \nu > 0, \ \ 0 \le t \le \infty;$

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} | w_{kl}(t) | \frac{| \varphi_l^{(j)}(t_\tau) |}{j!} \le K, \ \ K = \text{const}, \ \ 0 \le t \le \infty.$

Очевидно,

$$\frac{| \varphi_l^{(j)}(t - \tau) |}{j!} \le \frac{B^j j^j}{j!} \sim \frac{B^j j^j}{\sqrt{2\pi j}} \left(\frac{e}{j} \right)^j \sim \frac{(Be)^j}{\sqrt{2\pi j}}.$$

Следовательно, при $B < e^{-1},$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} | w_{kl}(t) | \frac{| \varphi_l^{(j)}(t - \tau) |}{j!} \le K.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

а) $\Lambda(A(t) + B(t)) \le -\nu, \ \ \nu > 0, \ \ 0 \le t \le \infty;$

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} | w_{kl}(t) | \frac{| \varphi_l^{(j)}(t \ - \tau) |}{j!} \le K, K = \text{const}, \ \ 0 \le t \le \infty.$

Тогда неподвижная точка нейронной сети (3) равномерно асимптотически устойчива.

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для нейронных сетей (4).

3. Устойчивость нейронных сетей с разрывными функциями активации

В данном разделе исследуется устойчивость нейронных сетей, функционирование которых описывается дифференциальными уравнениями вида (3) в предположении, что функции $\varphi_i(u)$, $i=1,2,\ldots,n$, $-\infty<u<\infty$, непрерывны всюду, за исключением конечного числа точек, в которых они имеют разрывы первого рода. Не ограничивая общности, можно считать, что имеется только одна точка разрыва. Пусть функции $\varphi_i(u)$ имеют вид

$$\varphi_i(u)=\begin{cases}\varphi_i^*(u), & u>u_*,\\ \varphi_i^{**}(u), & u<u_*,\end{cases}\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{23}$$

где u_* – точка разрыва.

На функции $\varphi_i^*(u)$, $\varphi_i^{**}(u)$ наложим следующие условия:

1) функции $\varphi_i^*(u)$, $i=1,2,\ldots,n$, непрерывно продолжаются на интервал $[u_*,\infty)$;

2) функции $\varphi_i^{**}(u)$, $i=1,2,\ldots,n$, непрерывно продолжаются на интервал $(-\infty,u_*]$.

В работе автора [6] (см. также [8]) исследована устойчивость НСХ без задержки при условии, что функции активации разрывны. В качестве аппарата исследования были использованы дифференциальные включения.

Использование дифференциальных включений для исследования устойчивости НСХ с запаздыванием приводит к сложным критериям устойчивости. Поэтому ниже будет использован другой подход.

Будем считать, что функции $\varphi_i^*(u)$, $i=1,2,\ldots,n$, разлагаются в равномерно сходящиеся ряды в интервале $[0,\infty)$, а функции $\varphi_i^{**}(u)$, $i=1,2,\ldots,n$, разлагаются в равномерно сходящиеся ряды в интервале $(-\infty,0]$.

Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем разделе, систему уравнений (3) приведем к виду (13).

Дальнейшее исследование будем проводить при следующих условиях:

1) разрыв в точке u^* имеет только одна из функций $\varphi_i(u)$, $i=1,2,\ldots,n$. Для определенности положим, что разрывной является функция $\varphi_1(u)$. Нетрудно видеть, что это ограничение не уменьшает общности рассуждений и введено только для простоты формулировок;

2) если $u^*=0$, то функция $\varphi_1(u)$ определяется выражением

$$\varphi_1(u)=\begin{cases}\varphi_i^*(u), 0\le u<\infty,\\ \varphi_1^{**}(u), -\infty<u<0.\end{cases}$$

Для определенности ниже полагается $u\neq 0$ и используется формула (23).

При сделанных предположениях систему уравнений (13) удобно представить в виде двух систем уравнений:

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t) z_k(t) + \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi^{*(j)}{}_l (z_l(t-\tau))}{j!} z_l^j (t-\tau),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

при $z_l(t-\tau) > u^*$,

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = -a_k(t) z_k(t) + \sum_{l=1}^{n} w_{kl}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_l^{**(j)} (z_l(t-\tau))}{j!} z_l^j (t-\tau),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

при $z_l(t-\tau) < u^*$.

По аналогии с разделом 2 введем матрицы

$$A(T),\ B_1(T),\ B_2(T),\ \Gamma_1(T),\ \Gamma_2(T),$$

где

$$A(T) = \{\alpha_{ij}(\tau)\},\ \alpha_{ii}(T) = -a_i(T),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \alpha_{ij} = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$B_1(T) = \{\beta_{ij}^*(T)\},\ \beta_{i1}^*(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{*(1)}(z_l(T-\tau))}{1!},\ \beta_{ij}^*(T) = 0,\ j \neq 1,\ i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$B_2(T) = \{\beta_{ij}^{**}(T)\},\ \beta_{i1}^{**}(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{**(1)}(z_l(T-\tau))}{1!},$$

$$\beta_{ij}^{**}(T) = 0,\ j \neq 1,\ i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\Gamma_1(T) = \{\gamma_{ij}^*(T)\},\ \gamma_{i1}^*(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{*(2)}(z_l(T-\tau))}{2!},\ \gamma_{ij}^*(T) = 0,\ j \neq 1,\ i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\Gamma_2(T) = \{\gamma_{ij}^{**}(T)\},\ \gamma_{i1}^{**}(T) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_l^{**(2)}(z_l(T-\tau))}{2!},$$

$$\gamma_{ij}^{**}(T) = 0,\ j \neq 1,\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

а) $\Lambda(A(t) + B_i(t)) \le -\nu,\ \nu > 0,\ 0 \le t \le \infty,\ i = 1, 2;$

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{*(j)}(t-\tau)|}{j!} \le L,\ 0 \le t \le \infty;$

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} |w_{kl}(t)| \frac{|\varphi_l^{*(j)}(t-\tau)|}{j!} \le L,\ 0 \le t \le \infty,\ L = \text{const},\ 0 < L < \infty.$

Тогда неподвижная точка нейронной сети (3) с точками разрыва функций активации равномерно асимптотически устойчива.

Доказательство. Обозначим через δ_* положительное число, удовлетворяющее неравенству $L\delta_* < \nu / 4$. Покажем, что любая траектория

$z(t,z_0)$, $z_0 \in B(0,\delta_*)$, начинающаяся в шаре $B(0,\delta_*)$, не покидает этого шара. Доказательство проведем от противного. Предположим, что в момент времени T траектория $z(t,z_0)$ покидает шар $B(0,\delta_*)$, проходя через точку z_*, $\| z_* \| = \delta_*$. Предположим также, что $| z_1(T,z_0)| = \delta_*$, $| z_i(T,z_0)| < \delta_*$, $i = 2,3,\ldots,n$.

Будем считать, что $z_1(T,z_0) > u_*$.

Тогда при таких значениях t, что $z_1(T,z_0) > u_*$ систему уравнений (13) можно представить в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B_1(t)z(t) + \Gamma_1(t)z^2(t) + \Psi(t). \tag{24}$$

При доказательстве теоремы 1 было показано, что при выполнении условий (а) и (б) норма $\| z(t) \|$ монотонно убывает и $\| z(t) \| < \| \delta_* \|$. Так как по условию теоремы функция $\frac{dz(t)}{dt}$ равномерно ограничена, то функция $z(t)$ непрерывна и существует такой момент времени T^*, что $z_1(T^*) = u_*$. При $t > T_*$ динамика нейронной сети описывается уравнением

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B_2(t)z(t) + \Gamma_2(t)z^2(t) + \Psi(t), \tag{25}$$

а в качестве начального значения можно взять любое значение z_0, удовлетворяющего условиям: $z_0 < u_*$, $z_0 \in B(0,\delta_*)$, а в качестве начального момента времени можно взять T^{**}, $T^{**} > T^*$. Это предположение законно, так как в момент времени T^* о траектории $z(t,z_0)$ известно лишь то, что $\| z(t,z_0) \|$ монотонно убывает и $z(T^*,z_0) \in B(0,\delta^*)$.

Повторяя применительно к системе (25) рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в равномерной сходимости $\| z(t) \|$ к нулю.

Теорема доказана.

Список литературы

1. **Hopfield, J. J.** Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities / J. J. Hopfield // Procceding of the National Academy of Science. – 1982. – V. 79. – P. 1554–2558.
2. **Hopfield, J. J.** Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons / J. J. Hopfield // Procceding of the National Academy of Science. – 1984. – V. 81. – P. 3088–3092.
3. **Ye Hui.** Wang Kaining Global and local stability of Hopfield neural networks with delay / Ye Hui, Michel Antiny N. // Phys. Rev. E 50. – 1994. – № 5. – P. 4206–4213.
4. **Bhaya, A.** Existence and stability of a unique equilibrium in continuous-valued discrete-time asynchronous Hopfield neural networks / A. Bhaya, E. Kaszkurewicz, V. S. Kozyakin // IEEE Transactions on Neural Networks. – 1996. – V. 7 (3). – P. 620–628.
5. **Cao, J. D.** Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time–varying delays / J. D. Cao, J. Wang // IEEE Transactions on Circuits and Systems-I. – 2003. – V. 50 (1). – P. 34–44.

6. **Бойков, И. В.** Устойчивость нейронных сетей Хопфилда / И. В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 9. – С. 124–140.
7. **Wu, A.** Global Asymptotical Stability of Delayed Impulsive Neural Networks without Lipschitz Neuron Activatios / A. Wu, J. Zhahg, C. Fu // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2010. – V. 10, № 5. – P. 806–818.
8. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. – 244 с.
9. **Далецкий, Ю. А.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / Ю. А. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 534 с.
10. **Деккер, К.** Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вербер. – М. : Мир, 1988. – 334 с.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет

E-mail: math@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University

УДК 518.5

Бойков, И. В.

Устойчивость нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 85–97.